Ю. О. Васильева, В. В. Сильвестров

Чувашский государственный университет,

Российский государственный университет нефти и газа,

vsilvestrov@mail.ru

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ ПО ЛИНИИ РАЗДЕЛА СРЕД

Решается смешанная краевая задача для кусочно-однородного упругого тела с прямолинейным полубесконечным разрезом на линии соединения материалов. К верхнему берегу разреза на конечном промежутке, примыкающем к вершине разреза, присоединена жесткая накладка заданной формы. Берега разреза нагружены заданными напряжениями.

Пусть в кусочно-однородном упругом изотропном теле, моделируемом в виде плоскости, составленной из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред расположен полубесконечный разрез $[0,+\infty)$, верхний берег которого на участке $[0,l]$ подкреплен абсолютно жесткой накладкой заданной формы, присоединенной к телу идеально жестко с заданным натягом, а остальная часть этого берега и весь нижний берег разреза нагружены заданными напряжениями:

$$u^+(x)+\mathrm{i}v^+(x)=s_1(x)+\mathrm{i}s_2(x)+\mathrm{i}\varepsilon x+(u_0+\mathrm{i}v_0),\quad x\in(0,l],\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\tau^+_{xy}(x)+\mathrm{i}\sigma^+_y(x)&=p^+_1(x)+\mathrm{i}p^+_2(x),\quad x\in(l,+\infty),\\ \tau^-_{xy}(x)+\mathrm{i}\sigma^-_y(x)&=p^-_1(x)+\mathrm{i}p^-_2(x),\quad x\in(0,+\infty),\end{aligned}\tag{2}$$

где $u+\mathrm{i}v$ — вектор смещений, $\tau_{xy}+\mathrm{i}\sigma_y$ — вектор напряжений, $s_1(x)$, $s_2(x)$, $p^\pm_1(x)$, $p^\pm_2(x)$ — заданные функции, ε — угол поворота накладки, $u_0 + \mathrm{i}v_0$ — комплексная константа, выражающая жесткое смещение всего тела. Функция $s_1(x)$ определяет величину натяга в точке x, а $s_2(x)$ — форму поверхности накладки. Вдоль луча $(-\infty, 0]$ полуплоскости соединены друг с другом так, что при переходе через линию соединения вектор смещения и вектор напряжений меняются непрерывно. На ∞ в верхней и нижней полуплоскостях действуют заданные нормальные продольные напряжения $\sigma_{x1}^{\infty} = \sigma$ и $\sigma_{x2}^{\infty} = \sigma\mu_2(1 + \kappa_1)/[\mu_1(1+\kappa_2)]$ соответственно, где μ_1, κ_1 и μ_2, κ_2 — упругие параметры верхней и нижней полуплоскостей соответственно. Напряжения σ_y, τ_{xy} и вращение ω на бесконечности исчезают, причем так, что при $z = x + \mathrm{i}y \to \infty$

$$\sigma_y - \mathrm{i}\tau_{xy} \sim \frac{K_I^{\infty} - \mathrm{i}K_{II}^{\infty}}{\sqrt{2\pi}z^{1/2-\mathrm{i}\beta}}, \quad \beta = \frac{\ln m}{2\pi}, \quad m = \frac{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}{\mu_2 + \mu_1\kappa_2}. \tag{3}$$

В точках $z = 0$ и $z = l + \mathrm{i}0$ они могут иметь особенности интегрируемого характера. Заданы еще главный вектор внешних сил, действующих на накладку, и момент этих сил относительно вершины разреза.

Требуется найти плоское напряженное состояние тела.

Согласно формулам Колосова – Мусхелишвили применительно к кусочно-однородной плоскости [1] напряжения, вращение и смещения точек составной плоскости выражаются через две кусочно-аналитические функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ с линией разрыва $[0, +\infty)$, на которой они, следуя краевым условиям (1) и (2), удовлетворяют матричной краевой задаче Римана

$$\begin{pmatrix} \Phi^+(x) \\ \Omega^+(x) \end{pmatrix} = G(x) \begin{pmatrix} \Phi^-(x) \\ \Omega^-(x) \end{pmatrix} + g(x), \quad x \in (0, +\infty), \tag{4}$$

где $g(x)$ — известный кусочно-непрерывный вектор-столбец, который выражается через заданные на берегах разреза вектор напряжений, производные вектора смещений и угол поворота накладки; $G(x)$ — кусочно-постоянная матрица, которая на отрезке $(0, l)$ совпадает с матрицей

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1^{-1} \\ -m & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\mu_1(\kappa_1 + \kappa_2) - 2\mu_2\kappa_1}{\kappa_1(\mu_2 + \mu_1\kappa_2)},$$

а на луче $(0, +\infty)$ — с матрицей $G_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -m & 1-m \end{pmatrix}$. На ∞ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ ограничены, а в точках $z = 0$ и $z = l \pm \mathrm{i}0$ они могут иметь особенности интегрируемого характера.

Решение приведенной матричной задачи Римана с кусочно-постоянным коэффициентом находится явно через гипергеометрическую функцию Гаусса $F(a, b; c; z)$ [2]. Ввиду громоздкости оно здесь не приводится. На основании этого решения нами найдены угол поворота накладки, комплексные потенциалы, исследована асимптотика напряжений вблизи точек $z = 0$ и $z = l \pm \mathrm{i}0$, определены коэффициенты интенсивности напряжений вблизи этих точек.

В данном случае, как и в случаях классической межфазной трещины и включения, напряжения в точке $z = 0$ имеют степенно-осциллирующую особенность, определяемую функциями $z^{-\gamma_0 + \mathrm{i}\delta_1}$ и $z^{\gamma_0 - 1 + \mathrm{i}\delta_2}$ и четырьмя действительными коэффициентами интенсивности, где показатели γ_0, δ_1, δ_2 зависят только от упругих параметров составной плоскости. Параметр γ_0 может принимать любые значения из промежутка $[1/2, 1)$, причем имеются целые области значений упругих параметров, для которых $\gamma_0 = 1/2$. Асимптотика напряжений вблизи точки $z = 0$ отличается от асимптотики напряжений как вблизи классической межфазной трещины [4], так и вблизи тонкого остроконечного включения, обе стороны которого жестко соединены со средой [5]. Нами подробно исследована зависимость показателей γ_0, δ_1, δ_2 и коэффициентов интенсивности напряжений от упругих, силовых и геометрических параметров задачи.

Вблизи точки $z = l + \mathrm{i}0$ напряжения ведут себя так же, как вблизи вершины штампа, сцепленного жестко со средой [3]. Их поведение описывается степенно-осциллирующей функцией $(z-l)^{-1/2+\mathrm{i}\beta_1}$ с показателем осцилляции $\beta_1 = \frac{1}{2\pi}\ln\kappa_1$ и двумя действительными коэффициентами интенсивности. Нами изучена зависимость этих коэффициентов от упругих, силовых и геометрических параметров задачи. Вблизи точки $z = l - \mathrm{i}0$ напряжения ограничены.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00103).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. *Механика разрушения композиционных материалов.* – М.: Наука, 1983. – 296 с.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* – М.: Наука, 1973. – 296 с.

3. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* – М.: Наука, 1966. – 707 с.

4. Rice J. R. *Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks* // Transactions of ASME. J. of Applied Mechanics – 1988. – V. 55. – No 1. – P. 98-103.

5. Ballarini R. A. *A rigid line inclusion at a bimaterial interface* // Engineering Fracture Mechanics. – 1990. – V. 37. – P. 173-182.